El saber matemático de los analfabetos. Origen y desarrollo de sus estrategias de cálculo*

Revista Latinoamericana de Estudios Educativos *(México, 1990), Vol. XX, No. 3, pp. 55-95*

Alicia Ávila Storer**

RESUMEN

En el campo de la educación matemática, la investigación sobre los mecanismos y procedimientos de aprendizaje de los adultos no se ha consolidado en paradigmas. Algunas investigaciones reportan que los adultos analfabetos o en proceso de alfabetización resuelven problemas aritméticos elementales, incluso en ocasiones realizan cálculos complicados.
Este artículo se basa en un estudio de casos, con una población de 13 sujetos, todos de origen rural y con diversas ocupaciones, considerados como analfabetos "puros". En la investigación se utilizó el método clínico, que exige entrevistas a profundidad.
El artículo reporta los pasos y resultados de esta investigación y concluye con algunas reflexiones finales sobre las estrategias y niveles de cálculo de los adultos analfabetos o en proceso de alfabetización.

ABSTRACT

The research on the process and mechanisms of learning mathematics by the adult population, has not yet arrived at definitive conclusions. Researchers tell us that illiterate adults are able to solve problems of elemental arithmetics, but that at times some of them make more complicated calculations.
Our study, based on clinical methods, performed in depth interviews in 13 cases, all of them being peasants, totally or almost illiterate.
This article describes the methods followed as well as the results obtained, such as the determination of the calculating potentials of the illiterate peasants.

---

* Agradezco profundamente la participación de los hombres y mujeres cuyo saber matemático se reporta en este artículo. En particular, deseo expresar a Don José que su claridad de pensamiento fue fundamental para la recolección e interpretación de los datos.
** Profesora de la Universidad Pedagógica Nacional, México.

I. MARCO DE REFERENCIA

Valorar la experiencia de los analfabetos ha sido un postulado básico de la alfabetización desde finales de los cuarenta. Desde la época de la educación fundamental, enlazar la experiencia de los adultos con los contenidos educativos se ha considerado una condición de eficacia y significatividad. La alfabetización funcional trata de articular la experiencia de los analfabetos a procesos globales de desarrollo, tanto en el ámbito económico como en el social. Para Freire se trataría de reconstruir la experiencia vital —de reconocerse oprimidos— para vincularla con procesos liberadores de acción cultural.

Sin embargo, sólo hasta fechas recientes el planteamiento global acerca de la experiencia se ha traducido en investigación sistemática de los saberes que los analfabetos construyen en su vida cotidiana. Los aportes de la psicología genética problematizaron los esquemas desde los cuales se había pensado tradicionalmente el proceso de aprendizaje, y hoy son los mecanismos de conocimiento el tema central de la reflexión.

Simultáneamente, se constituyó un nuevo reto pedagógico: considerar el saber y fundamentarse en la estructura y desarrollo del conocimiento que los adultos construyen en su interacción con el mundo.

En el campo de la educación matemática, la investigación sobre los mecanismos y procesos de aprendizaje de los adultos no se ha consolidado en paradigmas. Y no es difícil ver por qué apenas se está edificando el marco que sustente modelos de intervención pedagógica basados en los mecanismos de aprendizaje. De hecho, tanto el planteamiento funcional como el psicosocial enfatizaron, por distintas razones, la lecto-escritura y soslayaron el significado del cálculo en la experiencia vital de los adultos, particularmente en el mundo del trabajo.

Con todo, la investigación sobre las formas de aprendizaje del cálculo elemental se organizó lenta y progresivamente en torno a tres núcleos temáticos fundamentales:

1. Algoritmos construidos por los analfabetos.
2. Los contextos de construcción y uso de los algoritmos.
3. Conocimiento de los símbolos numéricos.

1. *Algoritmos construidos por los analfabetos*

Se ha reportado que los adultos analfabetos o en proceso de alfabetización resuelven problemas aritméticos elementales (Ávila *et al.*, 1986; Carraher *et al.,* 1986; Acioly y Días Schielman, 1986; Dimensión Educativa, 1986; Ferreiro, 1983). Los cálculos que realizan en ocasiones llegan a ser complicados; los que sobrepasan la centena, en algunos casos se resuelven por aproximación (Ferreiro, 1983: 23 y ss).

Parece haber coincidencia en la idea de que los adultos tienen su propio estilo de resolución: prefieren sumar y restar de izquierda a derecha, multiplicar por sumas reiteradas o duplicaciones y dividir por restas reiteradas (Acioly y Días Schielman, 1986; Carraher *et al*., 1986; Dimensión Educativa, 1986). Se ha indicado también que analfabetos corredores de apuestas utilizan procedimientos escritos como soporte de la realización de cálculos cuando éstos son difíciles de realizar mentalmente (Acioly y Días Schielman, 1986).

Estos hallazgos son de especial significación porque indican que los sujetos construyen procedimientos de cálculo, y que éstos son distintos de los escolarizados. Sin embargo, no se ha estudiado si estos procedimientos ocurren de manera diferenciada o si son comunes a todos los analfabetos. La explicación no profundiza respecto a las estrategias globales de resolución, a la lógica que las sustenta, o a los diversos casos aritméticos en que éstas pueden ser utilizadas. Es decir, no se conocen los principios en que se basan los mecanismos de resolución. Tampoco se conoce la génesis y el desarrollo de tales procesos.

2. *Los contextos de construcción y uso de los algoritmos*

Las operaciones aritméticas que realizan los analfabetos se relacionan con su trabajo, con los intercambios comerciales y con el dinero (Ferreiro, 1983; Luria, 1980). También se ha afirmado que el pensamiento matemático de los analfabetos está irremediablemente ligado al contexto en el que se genera la experiencia particular; y que esta liga no permite resolver problemas más allá de los datos proporcionados por el ámbito de la propia experiencia (Luria, 1980). Vale la pena indagar, sin embargo, si en cualquier condición los analfabetos *sólo* pueden ver y pensar el mundo desde los datos de la experiencia o si, por el contrario, existen grados en la capacidad de abstracción y generalización dados por la intensidad y complejidad de la experiencia. Esto es, se plantea el problema de la posible existencia de distintos grados de "analfabetismo matemático".

3. Conocimiento de los símbolos numéricos

Se ha indicado que los adultos identifican algunos símbolos numéricos (Ferreiro, 1983; Ávila, 1989), y que tal capacidad es diversa: algunos adultos sólo identifican los dígitos, otros, en cambio, son capaces de reconocer números hasta de cuatro cifras. Estos conocimientos derivan de las experiencias y necesidades cotidianas de los adultos: identificar caminos, rutas de camión, domicilios y monedas (Ávila, 1989). De entre las distintas necesidades destacan el manejo de precios y el dinero (Ferreiro, 1983).

Queda por responder si el conocimiento de los símbolos está relacionado con la habilidad en el cálculo y si —como afirman Acioly y Días Schielman— el manejo de números grandes obliga a los sujetos a usar lápiz y papel; o, en un sentido inverso, si cierta complejidad en el cálculo constituye un límite precisamente porque no se cuenta con un sistema de escritura.

II. OBJETIVOS Y METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación que aquí reportamos es un estudio de casos. Se realizó con el fin de detectar y describir, con base en la entrevista clínica, las estrategias de cálculo con las cuatro operaciones aritméticas básicas que utilizan los adultos no alfabetizados, la capacidad de generalización de tales estrategias, así como la relación entre cálculo y simbolización.

La estrategia seguida para realizar el estudio consistió en plantear al sujeto una lista de 24 problemas aritméticos y, una vez resuelto el problema, le pedíamos que: a) nos explicara verbalmente cómo había hecho el cálculo y, b) ejecutara nuevamente el cálculo con monedas, frijoles o hatos de palitos, materiales que le habíamos proporcionado al principio de la entrevista. Asimismo, solicitamos a los sujetos identificar 32 números naturales entre 1 y 1000, representados en forma manuscrita. El tiempo de trabajo con cada uno de los sujetos osciló —de acuerdo con la rapidez con que eran resueltos los problemas planteados— entre dos y seis horas, diferidas en dos o tres sesiones. Las entrevistas las realizamos, de manera individual, en el local del Círculo de Alfabetización, en la fábrica o el taller, en los puestos callejeros, en los parques o en la casa de los entrevistados.

Nuestra población estuvo conformada por 13 sujetos (siete mujeres y seis hombres), todos de origen rural y con diversas ocupaciones: un aseador de calzado, un mozo, un artesano, un campesino, un velador, un obrero, cuatro empleadas domésticas, una hilandera, un ama de casa y una vendedora ambulante. Vale la pena aclarar que ninguno de ellos había asistido a la escuela, por lo que según las definiciones tradicionales pueden ser considerados como analfabetos puros.

Respecto al tamaño de la muestra, conviene advertir que el método clínico utilizado exige, por su propia naturaleza, entrevistas a profundidad. En el método clínico —a diferencia de la encuesta— es irrelevante la significación estadística de los datos porque no interesa estimar los parámetros de la población. El reto es otro: reconstruir la génesis y la estructura de desarrollo en un modelo donde aciertos, deficiencias y errores adquieren significado explicativo.

Los resultados de la investigación apuntan a caracterizar las estrategias de cálculo construidas y utilizadas por los analfabetos en el contexto de su vida cotidiana. Se describe su origen y desarrollo y se analiza la capacidad de abstracción y generalización que se despliegan con su uso. Se exponen los principios rectores que guían a cada una de las estrategias, los casos aritméticos en que son utilizadas y los procesos específicos que caracterizan su desarrollo progresivo. El desglose se realiza de acuerdo con los distintos niveles que logran los sujetos en cada una de las operaciones aritméticas. Se analiza también la relación existente entre el manejo de registros gráficos y el desarrollo de la capacidad de cálculo.

III. LAS ESTRATEGIAS DE CÁLCULO

Los sujetos entrevistados mostraron poseer estrategias para resolver problemas con las cuatro operaciones aritméticas. Tales estrategias son diferentes de las que implican los algoritmos escolarizados y tienen en la base a la adición, operación que se muestra como estrategia universal del cálculo adulto no escolarizado. Así, la resta se traduce en una adición que permite calcular un faltante; la multiplicación, en su estrategia más general, es una adición que duplica reiteradamente un valor; la división es la suma iterada de un cociente hipotético y, por supuesto, la adición es también y simplemente una adición.

Si bien las estrategias son similares para cada una de las cuatro operaciones, sin embargo, se expresan con diferentes grados de desarrollo en los distintos sujetos. Definimos al respecto tres niveles que, por ahora, hemos llamado inicial, intermedio y final. Los indicadores que permitieron definir tales niveles, y que emergieron del análisis de los datos, son los siguientes:

a) eficacia, entendida como la capacidad de obtener resultados correctos;
b) eficiencia, es decir, número de tanteos necesarios para lograr resultados correctos;
c) destreza, esto es, capacidad de rebasar dificultades derivadas de la naturaleza de los números involucrados;
d) necesidad de utilizar objetos físicos (además de movimiento de dedos) y conteo para apoyar los cálculos;
e) capacidad de generalización de las estrategias, entendida como la posibilidad de manejar datos y contextos distintos de aquellos que se manejan en la experiencia de vida;
f) agilidad, es decir, rapidez con que los cálculos son realizados;
g) flexibilidad en el cálculo, esto es, capacidad de complementar o modificar estrategias básicas cuando la dificultad del cálculo así lo requiere.

El nivel inicial se caracteriza por una mezcla ocasional de los datos de la experiencia personal con los datos del problema matemático planteado.

Los sujetos realizan tanteos para resolver los cálculos, recurren al apoyo de objetos físicos (además del conteo con los dedos) para obtener las soluciones, y son incapaces de obtener resultados satisfactorios cuando aparece la reagrupación (en la suma) la desagrupación (en la resta) o el residuo (en la división). Por lo que a la multiplicación respecta, el límite lo constituye la incapacidad de memorizar las duplicaciones cuando el cálculo implica un buen número de ellas.

Asimismo, los sujetos del nivel inicial verbalizan sólo fragmentos de las estrategias de cálculo.

En el nivel intermedio, los sujetos ya no mezclan los datos de la experiencia personal con los datos del problema matemático planteado.

Los tanteos para resolver los cálculos han disminuido en relación con el nivel antecedente, así como la recurrencia a los objetos físicos para obtener las soluciones. En cambio, ha aumentado la agilidad en los cálculos y la reagrupación y desagrupación han desaparecido como obstáculos. El residuo permanece como impedimento y las estrategias de cálculo, en la mayor parte de los casos, no son verbalizados de forma sistemática y global.

El nivel final se caracteriza por la agilidad con que se resuelven los cálculos, por la ausencia de errores y tanteos y por la memorización de algunos productos (en el caso de la multiplicación), así como por la capacidad de obtener satisfactoriamente todos los resultados, de flexibilizar, complementar o modificar estrategias, y por la capacidad generalizada de verbalizarlas sistemáticamente.

En este nivel, la reagrupación, la desagrupación y el residuo ya no son obstáculos para el cálculo, y el apoyo en objetos físicos se torna innecesario. Asimismo, para la multiplicación y la división han aparecido estrategias más económicas, esto es, más simples y eficientes. Además, es amplia la capacidad de generalización de las estrategias de cálculo que han alcanzado los sujetos.

Conviene insistir en que estos niveles son parte de un proceso y que el paso de uno a otro, esto es, el progreso en la capacidad de cálculo, parece provenir de la frecuencia, la diversidad y la exigencia de exactitud en los cálculos que realizan los sujetos en su vida cotidiana y laboral.

IV. LA ADICIÓN

La estrategia general para efectuar adiciones, y que hemos llamado procedimiento indoarábigo por haber sido registrada en ese sistema hacia el año 1000 de nuestra era (cf. NCTM, 1969), tiene los siguientes componentes:

a) descomposición de los números involucrados en el cálculo con base en el sistema decimal (… centenas, decenas, unidades);
b) suma de los agrupamientos de orden superior (… centenas) y obtención de la primer suma parcial;
c) suma de los agrupamientos siguientes (… decenas) y obtención de una segunda suma parcial;
d) suma de los agrupamientos menores (unidades) y obtención de una tercer suma parcial;
e) suma de las sumas parciales, a partir de los agrupamientos mayores y obtención de la suma total (… centenas, decenas, unidades).

Este procedimiento está orientado por un principio de ordenación decreciente, es decir, primero las centenas, luego las decenas, luego las unidades, en el caso de los números naturales. Valga para ilustrar el procedimiento indoarábigo, el diálogo con un sujeto ubicado en el tercer nivel (*E* = Entrevistadora, *S* = Silvino):

E: Plantea un problema que implica sumar $250 de dulces y $310 de pepitas.
S: Pues… 250 y 310… resulta… 560 [muy rápido].
E: ¿Cómo hizo la cuenta, cómo le pensó para sacarla?
S: Pues es que como son $310 de pepitas y 250 de dulces, pues uno le piensa que 300 y 200 son 500 y 50 y 10 son 60, entonces, son 560.

La estrategia seguida por todos los sujetos para resolver el cálculo 250 + 310, puede esquematizarse así:

a) descomposición de los números en centenas y decenas:

$250 \rightarrow 200 + 50, \quad 310 \rightarrow 300 + 10$

b) suma de las centenas:

$200 + 300 = 500$

c) suma de las decenas:

$50 + 10 = 60$

d) suma de las sumas parciales para obtener la suma total:

$500 + 60 = 560$

El esquema expresa la estrategia seguida en los tres niveles, a pesar de las diferencias en la seguridad y la agilidad en el cálculo en cada uno de ellos.

Analicemos ahora el cálculo 45 + 28.

En esta adición reaparece el *procedimiento indoarábigo.* Por la reagrupación implicada, esto es, porque 5 y 8 suman más de 10, esta resultó ser la suma más difícil en el *primer nivel.* De hecho, sólo uno de los sujetos logró obtener un resultado correcto, luego de muchos tanteos. Asimismo, en el *segundo nivel* se exhibe pérdida de eficiencia en la solución de esta adición, aunque es resuelta exitosamente por cuatro de los cinco sujetos. Y si bien el uso de la estrategia en los tres niveles se diferencia por su eficiencia y eficacia, y por los conteos que se incorporan como apoyo, el esquema de resolución es el siguiente:

a) descomposición de los números en decenas y unidades:

$45 \rightarrow 40 + 5, \quad 28 \rightarrow 20 + 8, \quad \text{donde } 8 = 5 + 3$

b) suma de las decenas:

$40 + 20 = 60$

c) suma de las unidades:

$5 + 8 \rightarrow 5 + 5 + 3 = 13$

d) suma de las sumas parciales para obtener la suma total:

$60 + 13 = 73$

Veamos a un sujeto trabajar con la estrategia (José (J), *tercer nivel*):

J: ¿45 y 28?… 40… 60… 70… 73 [bastante rápido]. Sí, porque en un lado eran 5, en otro otros 5, pero eran 3 más, entonces se los junté hasta al último.
E: Explíqueme otra vez eso…
J: Eran 40 y 5, y 20 y 5, y los 3 que quedaron bailando.

En el *primer nivel* esta adición no se resuelve correctamente, mientras que en el *nivel intermedio* el cálculo se realiza con ciertas dificultades y en el *nivel final* se resuelve con agilidad y certeza. La diferencia se ubica en el hecho de que en el *nivel final* se maneja eficazmente la descomposición de los números:

$$45 + 28 \rightarrow (40 + 5) + (20 + 5 + 3) \rightarrow (40 + 20) + (5 + 5 + 3)$$

mientras en el *nivel inicial* tal transformación lleva a los sujetos a omitir un 5, o a sumarlo dos veces, lográndose así o bien 68 (45 + 23), o bien 78 (45 + 20 + 5 + 5 + 3).

En el *procedimiento indoarábigo,* utilizado en todos los casos de adición a que fueron enfrentados los sujetos, destaca el hecho de que el proceso que se sigue es exactamente inverso al escolarizado, donde la suma se empieza precisamente por los agrupamientos de orden inferior, es decir, por los agrupamientos menores (por las unidades, en el caso de los números naturales). Destaca asimismo que el principio de ordenación decreciente en el cual descansa la estrategia, deriva su lógica del manejo del dinero, y uno de los sujetos lo dijo con claridad: "primero se cuentan los billetes, hasta después los quintos, si no, estaría uno al revés".

Hemos afirmado antes que la agilidad y eficiencia, la naturaleza de los números involucrados, la capacidad de manejar la reagrupación y los apoyos adicionales que se requieren, son elementos que diferencian el uso de la estrategia en los tres niveles. Así, en el *primer nivel,* aun para los casos en que no hay reagrupación, se observan tanteos, apoyo en monedas, conteos e incluso errores; mientras que en el *tercer nivel* el resultado se obtiene mentalmente y con gran rapidez, aun cuando la reagrupación está implicada.

V. LA SUSTRACCIÓN: UNA SUMA PARA CALCULAR UN FALTANTE

Para resolver problemas que involucran sustracción, los analfabetos han construido dos estrategias: el *procedimiento indoarábigo* y la *sustracción por complemento aditivo.*

La estrategia utilizada para resolver sustracciones cuando el cálculo no implica desagrupación, basada también en el principio de ordenación decreciente, es el procedimiento indoarábigo y tiene los siguientes componentes:

a) descomposición de los números en… centenas, decenas y unidades, en ese orden;
b) resta de las… centenas, es decir, de los agrupamientos mayores, con la idea de completar (mediante una suma), y obtención de la primera resta parcial;
c) resta de las decenas, predominantemente con la idea de completar, y obtención de la segunda resta parcial;
d) resta de las unidades, es decir, de los agrupamientos menores, predominantemente con la idea de completar, y obtención de la tercera resta parcial;
e) suma de las restas parciales, a partir de los agrupamientos mayores para obtener la resta total.

En el caso de la resta 75-62, el esquema que expresa la estrategia de resolución es el siguiente:

a) descomposición de los números en decenas y unidades:

$75 \rightarrow 70 + 5$, $62 \rightarrow 60 + 2$

b) resta de las decenas, con la idea de:

resto: o complemento:

70 - 60 = 10 60 + 10 = 70

c) resta de las unidades, con la idea de:

resto: o complemento:

5 - 2 = 3 2 + 3 = 5

d) suma de las restas parciales para obtener la resta total:

10 + 3 = 13

En esta estrategia —procedimiento indoarábigo— destaca, al igual que en la suma, el manejo a partir de los agrupamientos mayores. Se restan primero las centenas, luego las decenas, después las unidades. Y esto, sugerimos, porque el referente que se tiene es el dinero.

La sustracción por complemento aditivo es la estrategia analfabeta que permite resolver sustracciones que implican desagrupación. Esta estrategia, que traduce la resta en una adición, puede esquematizarse así en el caso del cálculo: 92-55:

92 - 55 = X → 55 + X = 92.

En este caso los sujetos obtienen el valor de X sin descomponer los números involucrados. En lenguaje común sería posible expresar así el razonamiento involucrado en la estrategia: "55 para 92… 37, porque 55 y 37 son 92". Escuchemos a uno de nuestros sujetos (Valentín (V), tercer nivel):

V: Si hiciera 92 y le quedaran 55… (se refiere a un problema con el cálculo 92-55)… ¡ahora sí está difícil!… pero la vamos a sacar…son 55... 30… 35 [en voz baja]… le quedarían ¿33? [dirigiéndose a *E*]…

E: A ver, dígame otra vez: eran 92…

V: [Interrumpe a *E*] Eran 92… bueno, eran 90… (obsérvese la introducción del redondeo: 92 = 90 + 2)… y vendió 55… le quedaban 35… si tuviera 90, pero tenía 92… entonces le quedan 37 [bastante rápido].

La sustracción por complemento aditivo no está de hecho perfilada en el *primer nivel.* Los sujetos fracasan sistemáticamente al intentar resolver cálculos que involucran desagrupación cuando los números involucrados no terminan en 0 o 5 respectivamente. En el *segundo nivel*, la desagrupación obliga a tanteos y conteos. En el *tercer nivel* reaparecen la agilidad y la certeza no observadas en los niveles antecedentes.

En la estrategia que acabamos de describir, el progreso es notable de nivel a nivel. Mientras en el *nivel inicial* la estrategia aún no está delineada y los sujetos realizan intentos sin lógica aparente, en el nivel intermedio se necesitan objetos físicos, tanteos y conteos para obtener el cálculo. Los sujetos de este nivel nos explicaron: “Yo en 55 me baso, y de ahí ya me voy: 56, 57, 58”; o “primero le conté los 55 y de ahí agarré: 55, 56, 57, 58, 59, 60”… y los vimos resolver el cálculo con las monedas, en ocasiones, contándolas de una en una. En el nivel final, en cambio, se prescinde de los conteos, los tanteos y los objetos. Y esto gracias a que los sujetos han incorporado el redondeo, mecanismo que hace eficaz el cálculo.

Un último comentario en relación con la sustracción. Si bien en términos generales los sujetos transforman en adición la sustracción, al pensarla como la búsqueda de un faltante, en los sujetos con menos desarrollo se evidenció en ocasiones la necesidad de recurrir a la idea de obtener el resto (gastar dinero, para ser exactos) ante la incapacidad de calcular el faltante que implicaba el problema en cuestión. Esto permite interpretar la idea de obtener el resto (quitar) como la más primitiva asociada a la resta, por estar ligada a la acción particular y concreta que la generó: gastar dinero, esto es, retirar monedas.

VII. LA MULTIPLICACIÓN: UNA SUMA PARA DUPLICAR REITERADAMENTE UN VALOR

Las estrategias que han construido los analfabetos para resolver multiplicaciones son tres:

a) *conteo o suma de sumandos iguales;* se utiliza cuando la sencillez del cálculo permite transformarlo en un simple conteo;
b) *duplicación reiterada;* ésta es la estrategia más general de multiplicación; es utilizada cuando los cálculos rebasan la dificultad señalada en el inciso anterior, esto es, cuando no pueden resolverse por un simple conteo;
c) *multiplicación abreviada.* Esta estrategia se utiliza exclusivamente en el tercer nivel. Sustituye a la duplicación reiterada en los casos en que los sujetos han memorizado los productos involucrados en el cálculo.

a) Conteo o suma de sumandos iguales

Esta estrategia consiste en un conteo seriado en donde la unidad de conteo es uno de los factores, valor que también corresponde a cada uno de los sumandos iguales de la suma con que podría expresarse el cálculo.

En el caso del cálculo 200 x 6, la estrategia puede expresarse así:

200 x 6→200, 400, 600, 800, 1 000, 1 200

"De a 200: 2, 4, 6, 8, 10, 12… vienen a ser 1 200", nos dice un sujeto.

La estrategia también podría expresarse como una suma de sumandos iguales, en particular si nos referimos al *primer nivel,* donde los sujetos no han memorizado del todo las series involucradas y aún recurren a la suma, base de la memorización:

200 x 6→200 + 200 + 200 + 200 + 200 + 200 = 1 200

El conteo o suma de sumandos iguales no aparece en el *tercer nivel,* ya que los sujetos han memorizado combinaciones de multiplicación y de esta manera obvian los conteos. Es decir, la estrategia puesta en marcha en el *tercer nivel,* supone una síntesis del conteo propio del nivel antecedente, síntesis que se basa en la memorización de productos.

Mientras que en el segundo nivel nos dicen: “es así como quien dice seguido”, o “yo fui de uno por uno”, refiriéndose al conteo 200, 400, 600, 800, 1 000, 1 200, necesario para calcular 200 x 6, en el tercer nivel nos indican: “de tanto, ya sabe uno lo que es”, y la rapidez con que se realizan cálculos como el mencionado, son prueba de tal afirmación.

b) Duplicación reiterada

Ésta es la estrategia básica de multiplicación por la potencia que supone, esto es, por el infinito número de cálculos que pueden ser resueltos con ella. Consiste en duplicar reiteradamente uno de los números involucrados en el cálculo, hasta lograr la suma equivalente al producto buscado. Es decir, la estrategia consiste en duplicar uno de los factores, obteniendo así dos veces el valor del factor utilizado para realizar el cálculo; duplicar nuevamente el resultado obtenido, obteniendo así cuatro veces el valor del factor; duplicar nuevamente el resultado obtenido, obteniendo así ocho veces el valor del factor tomado para realizar el cálculo; el procedimiento se repite tantas veces como sea necesario para lograr el producto correspondiente o, en ocasiones, sólo hasta encontrar un número cómodo para continuar realizando el cálculo. Para el caso de la multiplicación 12 x 30, el esquema de resolución es el siguiente:

$$(((30 + 30) + 60) + 120) + 120 = 360$$

Cabe señalar que la estrategia de duplicación reiterada es similar a la utilizada por los egipcios según se registra en el *Papiro Rhind,* manual práctico de matemáticas escrito hacia el año 1700 a.C. (cf. Newman, 1968).

Conviene hacer dos señalamientos más sobre la duplicación reiterada antes de iniciar el desglose de su desarrollo: 1) en el *nivel inicial* aún no se encuentra consolidada; 2) en el *tercer nivel,* prácticamente ha desaparecido debido a la memorización de productos que han logrado los sujetos, memorización que les permite sintetizar los mecanismos de multiplicación. Así, en el *primer nivel* la estrategia se abandona cuando apenas se han realizado unas cuantas duplicaciones, mientras que en el *tercer nivel* sólo quedan resabios de su uso. Los diálogos que insertamos a continuación ilustran el desarrollo progresivo de la duplicación reiterada en el caso del cálculo 12 x 30 (Margarita, *primer nivel*):

E: Plantea un problema con el cálculo 12 x 30:
M: ¿12 bolillos?
E: Sí, 12 bolillos, a $30 cada uno.
M: ¡Ay, maestra, voy que no me sale! [se ríe] ...12 me dijo… de a 30... [piensa, mueve los labios y los dedos]… en dos serían ¿qué?… ¿60?… [pensativa]… otros 60 serían… ¿qué? ¿120?… [pensativa]… ¡No, maestra, no va a salir, es más fácil de a 500! [M se refiere a que es más fácil comprar $500 de pan].
E: Pero yo le puse a $30 cada bolillo, 12 bolillos.
M: (Piensa, mueva los labios)...60 [en voz baja, sigue pensativa]… ¡No sale, maestra!
E: Hágala si quiere con las monedas...
M: Piensa un momento, luego toma, de tres en tres, monedas de $10 hasta hacer 12 alteros de $30… Aquí está lo de 12 [dirigiéndose a *E*]…

La estrategia, que en el primer nivel se abandona apenas hechas unas cuantas duplicaciones, o se maneja de manera ineficiente y mezclada con la suma de sumandos iguales, gana en claridad, eficiencia y eficacia en el segundo nivel (Vicenta, segundo nivel):

V: [Refiriéndose a 12 bolillos de $30]… en 2 serían 60; de otros 2 serían otros 60; serían 60...120 de 4; de otros 4 otros 120… 240; de otros 4 serían otros 120; son… 360.

La estrategia de duplicación reiterada ha caído en desuso en el *tercer nivel.* A la pregunta ¿fue contando lo que era en dos y luego lo que era en otros dos?, un sujeto responde: “No, no, yo de un jalón agarré… muy poco pienso en contar así como usted dice”. Y la rapidez con que los sujetos ubicados en el *tercer nivel* resuelven los cálculos es testimonio del abandono de la duplicación reiterada. El caso de la multiplicación 17 x 18 exhibe también la evolución de la duplicación reiterada. En los intentos de resolución observados en el *primer nivel,* los sujetos evidenciaron nuevamente incapacidad de resolución. Ninguno de los sujetos ubicados en este nivel obtuvo un resultado correcto; en tres casos por manejo ineficiente de la estrategia y en dos más porque de antemano se reconoció como irresoluble el cálculo. Vale la pena mencionar que los sujetos de este nivel tienen claridad respecto a las multiplicaciones que son incapaces de resolver, de tal suerte que, en ocasiones, hay una negativa rotunda a solucionar el cálculo y, en otras, se accede a resolverlo una vez que las cifras planteadas originalmente son sustituidas por otras terminadas en 5. Cabe mencionar, por otra parte, que sólo dos sujetos de este nivel resolvieron satisfactoriamente el cálculo 25 x 23, el cual hemos visto que es más sencillo, desde la lógica de los sujetos, precisamente porque uno de los factores termina en 5.

En el *segundo nivel,* el cálculo 25 x 23 es resuelto exitosamente en todos los casos. Los límites en el cálculo se encuentran en multiplicaciones como 17 x 18, esto es, en multiplicaciones que involucran números de dos cifras con terminación distinta de 5 o 0. Pero aquí los obstáculos y errores son distintos de los que impiden las soluciones satisfactorias en el primer nivel: el abandono de la estrategia antes de lograr la solución o de obtener sumas parciales, e incapacidad de integrarlas para obtener el producto total. Así, por ejemplo, es posible obtener mediante duplicaciones iteradas los productos parciales 72, 72, 72, 72 y 18, pero no es posible sumarlos para obtener el 306.

c) Multiplicación abreviada

En cuanto a la multiplicación, el cálculo adulto no escolarizado ha alcanzado en el nivel final un avance muy considerable en relación con la etapa que le antecede. Los cálculos se resuelven con gran agilidad, sin apoyo de objetos físicos y con certeza. Y esto se logra gracias a que se ha construido una nueva estrategia, la multiplicación abreviada, que sustituye a la duplicación reiterada, y que constituye una forma de sintetizar el cálculo mediante el redondeo de uno de los factores y la utilización de los productos que se han memorizado. De esta manera, en el tercer nivel se han hecho a un lado los obstáculos en la multiplicación y los sujetos resuelven cálculos que no logran realizar en los otros niveles. Observemos el uso de la estrategia (Silvino, tercer nivel):

S: Ahí está más larga [se refiere al cálculo 17 x 18].
E: Pero, ¿sí la puede sacar?
S: Sí, nomás espéreme… [piensa, mueve los labios]… me saldrían 306 [bastante rápido].
E: ¿Cómo hizo la cuenta, cómo contó para sacar los 306?
S: Pensé en que fueran de a 20 cada caja, ahí serían 340; si fueran de a 20, pero luego de ahí hay que irle quitando porque sobraban 2 en cada una [el problema indicaba 18, no 20].
E: ¿Cómo?
S: Sí, 2 en 17… son 34, es lo que hay que apartar de lo que teníamos, y salió… a 306.

El esquema que puede expresar la estrategia de resolución, en el caso que hemos ejemplificado, es el siguiente:

a) redondeo de uno de los factores:

17 x 18→17 x 20

b) realización de la multiplicación con los nuevos factores:

17 x 20 = 340

c) cálculo del excedente introducido por el redondeo:

20 - 18 = 2, entonces, 2 x 17 = 34

d) resta del excedente introducido por el redondeo:

340 - 34 = 306

Esta estrategia, que introduce el redondeo y la memorización de productos, y que es utilizada por los sujetos del *tercer nivel,* constituye el grado máximo de desarrollo en el manejo de la multiplicación analfabeta, y sugerimos que es resultado del desarrollo progresivo de la estrategia denominada duplicación reiterada.

VIII. LA DIVISIÓN: UNA SUMA PARA PROBAR UN COCIENTE

La estrategia básica de división, a la cual hemos llamado *suma iterada del cociente hipotético,* se basa nuevamente en la adición. Consiste en suponer un resultado (cociente hipotético) y probar si es correcto sumándolo tantas veces como indique el número correspondiente al divisor.

La suma iterada del cociente hipotético se aplica con la descomposición del dividendo cuando la complejidad del cálculo lo requiere —dividiéndose las… centenas, decenas y unidades por separado, con este mismo procedimiento— y se maneja con más o menos certeza de acuerdo con el nivel en que se encuentren los sujetos.

El principal obstáculo en el manejo de la división lo constituye el residuo, elemento que marca la pérdida de la eficiencia en la estrategia y que hace exclusiva del *nivel final* la resolución de los cálculos que lo implican. Y es que en este nivel los sujetos han tomado conciencia del sobrante, lo cual es condición indispensable para poder manejarlo. Asimismo, en el nivel final se ha desarrollado una nueva estrategia, basada también en la suma iterada, pero esta vez no del cociente hipotético sino de *múltiplos del divisor.*

Ejemplificamos a continuación, con la división 900 ÷ 3.

a) suma iterada del cociente hipotético en su versión más elemental, esto es, sin descomposición del dividendo:

   900 + 3 → ¿300?

b) prueba de la validez del cociente hipotético mediante su suma iterada:

   300 + 300 + 300 = 900

La prueba de la validez se realiza mediante la comparación del número de veces que es utilizado como sumando el cociente hipotético y el número que corresponde al divisor, así como por la igualdad que deberá existir entre el resultado obtenido en la suma y el dividendo.

Si la prueba no otorga validez al cociente hipotético, entonces:

c) suposición de un nuevo resultado (cociente hipotético) y repetición del proceso hasta encontrar el que sea válido.

Esta estrategia fue utilizada con tanteos por todos los sujetos del *primer nivel* y no en todos los casos resultó exitosa. Así, vimos a los sujetos suponer 200 o 400 como cocientes, los cuales fueron eliminados al realizarse la suma iterada: "Está muy arriba el precio" o "hay que ponerle de más, porque en 200 no sale", fueron expresiones de los sujetos que en ocasiones no reiteraron el procedimiento hasta obtener un cociente válido. La estrategia, en el *segundo nivel,* muestra avances importantes: todos los sujetos resuelven el cálculo, el tiempo para hacerlo ha disminuido, algunos ya no realizan tanteos y ninguno se apoya en objetos físicos para llegar al resultado correcto. En el *tercer nivel,* el progreso es notable. No hay tanteos y el cálculo se realiza con suma rapidez (José, *tercer nivel*):

J: … $300 cada kilo: 3, 6, 9 [muy rápido].
E: ¿Me puede explicar cómo la hizo?
J: De a $3, de a $300 por cada kilo; o sea, la saqué con tres dedos: 3, 6, 9. Ésta es más sencilla: 3, 6, 9, porque se trata de precio cerrado… son $900.

La suma iterada del cociente hipotético se aplica con descomposición del dividendo cuando la complejidad del cálculo así lo exige. Es decir, se dividen por separado las… centenas, decenas y unidades, reiterando el procedimiento antes descrito. Analicemos el caso de la división 480 ÷ 4, en la cual se utiliza esta estrategia. El esquema de resolución es el siguiente:

a) descomposición del dividendo en centenas y decenas:

$480 \rightarrow 400 + 80$

b) resolución de la división 400 ÷ 4 mediante suma iterada del cociente hipotético:

$400 \div 4 \rightarrow ¿100 ?$

c) prueba de la validez del cociente hipotético con base en su suma iterada:

$100 + 100 + 100 + 100 = 400$

Si el cociente hipotético no prueba su validez, entonces se supone otro cociente hasta encontrar el que sea válido.

d) resolución de la división 80 ÷ 4, mediante suma iterada del cociente hipotético:

$80 \div 4 \rightarrow ¿20?$

e) prueba de la validez del cociente hipotético:

$20 + 20 + 20 + 20 = 80$

Si el cociente hipotético no prueba su validez, entonces se supone otro hasta encontrar el que sea válido.

f) suma de los cocientes parciales para obtener el cociente total:

$100 + 20 = 120$

En el *primer nivel* sólo tres de los cinco sujetos resolvieron correctamente esta división, uno de ellos apoyándose en monedas y después de muchos tanteos. En el *segundo nivel,* el progreso específico lo constituye el hecho de que todos los sujetos logran un resultado correcto, sin apoyarse en objetos físicos y con muchos menos tanteos que en el nivel antecedente. Una explicación típica de este nivel es la siguientes: “¿480 los cuatro?… ‘ora’ verá… salen a ciento... a 120 cada uno... hice la cuenta empezándole de a 100… de a 100 a cada uno, y luego se le agregan 20 a cada uno [a cada 100]; son 80, son 480". Nuevamente son la certeza y la agilidad las que constituyen el progreso en el *tercer nivel*, donde han desaparecido por completo los tanteos.

Hasta aquí hemos analizado divisiones exactas, divisiones que están al alcance de los sujetos del *primer* y *segundo nivel,* pues no implican la dificultad que marca el límite en el cálculo de cocientes en estos niveles, que es el manejo del sobrante. En seguida nos ocupamos de este caso.

Como hemos dicho, el residuo marca los límites del cálculo de cocientes en el *primer nivel.* La división 840 ÷ 3 (que de acuerdo con el procedimiento seguido por los sujetos implica un residuo intermedio) evidencia tal situación, pues ninguno de los sujetos logró resolverla satisfactoriamente.

La estrategia observada —suma iterada del cociente hipotético— si bien en el *primer nivel* no es exitosa, puede esquematizarse así:

a) suposición de un cociente:

   840 ÷ 3 → ¿300?

b) prueba de la validez del cociente hipotético, mediante suma iterada:

   300 + 300 + 300 = 900

c) percepción de la no validez del cociente hipotético, e incapacidad de modificarlo para obtener el correcto.

A continuación se observa la incapacidad de modificar el cociente hipotético propia del *primer nivel* (Delfina, *primer nivel*):

D: 840… [en voz baja]... ¿que me los dieran a cómo? [se refiere al cálculo 840 ÷ 3].

E: A $3.

D: [Piensa, hace conteos en voz baja durante un rato]. Dos saldrían a 300 y uno a 240 [dirigiéndose a *E*].
E: Hágala [la cuenta] por favor otra vez, porque no le entendí muy bien.
D: ¿Por qué, cuánto me dijo?
E: Eran $840, para comprar conos de $3…
D: ¿De a $3?, ¡ah!, yo la saqué de a 300… [piensa un rato]… es que no sé contarla bien… [se queda callada, no continúa].

Este sujeto, al igual que otros del *primer nivel,* muestra la incapacidad de modificar el cociente supuesto inicialmente (300). El obstáculo radica en que se espera obtener en la prueba del cociente una suma igual al dividendo. Por supuesto, con base en la herramienta con que cuentan los sujetos de este nivel, tal expectativa no se cumple. Al respecto se nos dice: "Dos saldrían en 300 y uno a 240" o "300… y otros 300...en los otros 300 es donde ya no salió…" En otras palabras, los sujetos buscan un resultado exacto (sin residuo) en su aproximación, y al no lograrlo abandonan la solución o sostienen un resultado erróneo porque no han incorporado en su reflexión la posibilidad de un sobrante, es decir, la posibilidad de que el resultado de la suma iterada del cociente hipotético no coincida con el divisor. He aquí los límites del cálculo de cocientes en el *primer nivel.*

En el *segundo nivel* el cálculo 840 ÷ 3 marcó el inicio de la pérdida de la eficiencia de la suma iterada del cociente hipotético. Si bien se ha avanzado, pues todos los sujetos intentan resolver el cálculo mentalmente, se hipotetiza más de un cociente y se logra el resultado en un caso, los tanteos aumentan y pierden seguridad si se les compara con las divisiones que no implican residuo, tal como se resuelven en este mismo nivel.

Suma iterada de múltiplos del divisor

En contraste con los niveles antecedentes, en el tercer nivel se resuelven exitosamente divisiones como 840 ÷ 3. La estrategia que se pone en marcha para hacerlo, denominada suma iterada de múltiplos del divisor, sustituye a la suma iterada del cociente hipotético. Ilustramos en seguida el uso de la estrategia (Valentín, *tercer nivel*):

E: [Plantea un problema con el cálculo 840 ÷ 3].
V: 840… ¿de a tres?… ¡ahora bien, yo creo que aquí sí vamos a necesitar algo que nos ayude, porque son varias!… tres por cinco: 15... 45 90… [en voz baja, luego toma una revista y un lápiz que yo le doy y, a la vez que va haciendo cálculos mentalmente, anota lo siguiente:]
33
33
33
33
33
33
33
33
33 [cabe señalar que ésta fue la única ocasión en que en el *tercer nivel* se utilizó un registro no mental del cálculo], [luego, dirigiéndose a *E*] ¿Serán 280?

E: Sí, ¿cómo la sacó?.
V: Pues "ora" sí que con un poquito de suma… [fui sumando] los montones… fui sumando de, digamos, de 33…
E: ¿Por qué de a 33?
V: Porque me salía más fácil… me salen 99, sobrándome uno [seguramente se refiere a que 33 x 3 = 99 y 99 + 1 = 100] .

En otras palabras, para realizar la división, el sujeto obtiene al menos los siguientes múltiplos del divisor:

3 x 11 = 33 (primer múltiplo),
33 x 3 = 99 (segundo múltiplo).

La obtención de tales múltiplos facilita notablemente la obtención del cociente.

Este esquema de resolución corresponde también a la estrategia utilizada para resolver el cálculo 200 ÷ 12. Los pasos seguidos en este último caso pueden esquematizarse así:

a) iteración del divisor tantas veces como sea necesario para obtener un múltiplo cómodo para el cálculo:

12 x 5 = 60

b) iteración del múltiplo obtenido tantas veces como sea necesario para obtener el múltiplo más próximo al dividendo, menor que éste:

60 x 3 = 180

c) cálculo del residuo intermedio (diferencia entre el múltiplo obtenido en el paso anterior y el dividendo):

200 - 180 = 20

d) división del residuo intermedio:

20 ÷ 12 = 1

e) cálculo del residuo final:

20 - 12 $\rightarrow$ 12 + 8 = 20

f) integración del cociente global, mediante suma de los cocientes parciales:

15 + 1 = 16

Cabe mencionar que, en la aplicación de la suma iterada de múltiplos del divisor, los sujetos utilizaron distintos múltiplos y distinta ordenación de los mismos; aquí ejemplificamos con los múltiplos específicos utilizados por dos sujetos; que otros sujetos hayan utilizado, por ejemplo, la secuencia 12 x 4 = 48 (primer múltiplo), 48 x 2 = 96 (segundo múltiplo) no invalida, empero, el esquema general que subyace en la estrategia.

De manera parecida a como ocurre en la multiplicación, es la ejercitación y diversidad en los cálculos, que deviene memorización y destreza, la que posibilita la construcción de esta estrategia, la que, ha de señalarse, amplía notablemente los límites del cálculo de cocientes en el tercer nivel.

IX. LA CAPACIDAD DE GENERALIZAR LAS ESTRATEGIAS DE CÁLCULO

Los sujetos ubicados en el *primer nivel* muestran, ocasionalmente, dificultades para desprenderse de los datos de su experiencia particular e introducirse en la lógica y en los datos de los problemas aritméticos planteados. Es decir, en ocasiones los sujetos funden la lógica y los datos de las situaciones hipotéticas que se les presentan con los datos de su experiencia previa, y esta fusión toma diversos grados y diversas formas:

1. Centralización en la experiencia particular

En este caso, los sujetos exhiben una total incapacidad de manejo del problema. Dicha incapacidad denota que los sujetos no se introducen en la lógica de la situación planteada y permanecen centrados en los datos de su experiencia cotidiana. Los sujetos ubicados en el primer nivel evidencian, ocasionalmente, tal centralización en el momento de intentar resolver un cálculo hipotético. Tal es el caso siguiente (Hilario, *primer nivel*):

E: Si se pagan $575 por cinco pasajes, ¿cuánto cuesta cada pasaje?
H: Póngale que son 250 por pasaje.
E: ¿Por qué 250?, le dije $575 por cinco pasajes.
H: Así pago de aquí a Taxqueña: 250.
E: Haga otra vez la cuenta por favor, le dije que se pagaban $575 por los cinco pasajes.
H: 250… en un pasaje [dirigiéndose a *E*].
E: ¿Por qué le salió a 250, cómo hizo la cuenta?
H: Lo que pago de aquí a allá [nuevamente los datos de su experiencia] son $250, ahora que cinco pasajeros… [se queda pensativo, no resuelve el problema, sólo alude otros datos y circunstancias de su experiencia personal].

Y esta centralización en la experiencia particular, que no permite a los sujetos introducirse en la situación hipotética que se les plantea, se presentó, en algún momento, en cuatro de los cinco sujetos ubicados en el *primer nivel.*

2. Canjeo de los datos numéricos del problema por los datos de la experiencia personal

En este caso, la resolución de los problemas se basa en los datos numéricos de la experiencia previa. Es decir, los sujetos sustituyen los números del problema por los que manejan cotidianamente. La diferencia con la centralización en la experiencia particular la constituye el hecho de que los sujetos se introducen en la lógica de la situación hipotética planteada y utilizan las relaciones implicadas en la misma. Si bien permanecen los datos numéricos de la realidad cotidiana, se ha aceptado la situación problemática planteada y es ésta la que guía el razonamiento. Sugerimos, al respecto, que el contexto planteado en el problema permite resolverlo porque expresa acciones familiares para el sujeto: comprar y vender, por ejemplo. Esto se observó en varios sujetos que al intentar resolver problemas con acciones como comprar tortillas, cigarros o pan, lo hicieron correctamente, pero con los precios que ellos cotidianamente manejaban.

3. Canjeo del contexto del problema —y conservación de los datos numéricos— para reinterpretarlo y resolverlo con base en una acción conocida

En los intentos de resolución en que se observó este tipo de fusión, el problema se transforma en otro relacionado con la experiencia previa para lograr la solución. Esto apoya una afirmación hecha anteriormente: las acciones ligadas al manejo del dinero (comprar y vender) son el origen de las estrategias de cálculo. Y la reinterpretación de los problemas con base en tales acciones da a los sujetos del primer nivel, en ocasiones, la posibilidad de resolución. Así, es factible resolver problemas que implican, por ejemplo, sacar o perder, sustituyendo dichas acciones por otras más familiares como gastar o vender, acciones por demás familiares a los sujetos.

4. Yuxtaposición, es decir, intento de solución con los datos del problema hipotético y regreso, en una etapa avanzada del proceso de resolución, a los datos de la experiencia personal

En este caso, los sujetos muestran inicialmente un desprendimiento de los datos cotidianos. Finalmente, tal desprendimiento no se logra y se regresa a los datos de la experiencia. De esta manera, las soluciones que se obtienen son erróneas pues contienen, en parte, los datos del problema y, en parte, los datos de la experiencia. Veamos (Ramón, primer nivel):

E: Si usted comprara cinco bolillos, a $30 cada uno, ¿cuánto tendría que pagar?
R: Cinco bolillos… ¿a 30?… 30... 60… 60…120; 120 y… 35.
E: Iba usted en 120, luego, ¿qué le puso para que la cuenta le saliera a 135?
R: Le puse cinco más [el sujeto se refiere a que aumentó $5 al bolillo. El precio real del bolillo en la época en que se realizó la entrevista era de $35].
E: Pero usted me dijo que de cuatro bolillos son 120…
R: Sí… más 35 [vuelve al precio real del bolillo. No obtiene el resultado correcto].

En casos como el anterior, los sujetos muestran un desprendimiento inicial de los datos manejados en la experiencia vital. Finalmente, tal desprendimiento no se logra y se concluye la resolución con los datos correspondientes a la experiencia cotidiana.

La dificultad para desprenderse de los datos de la experiencia particular, dijimos antes, se observa solamente en el *primer nivel,* lo cual convierte a esta característica en uno de sus rasgos definitorios.

Y los datos sugieren que tal dificultad deriva de la falta de frecuencia, diversidad y exigencia de exactitud en los cálculos que realizan los sujetos. En efecto, los sujetos ubicados en el *primer nivel* han tenido a lo largo de su vida escaso o monótono manejo del cálculo, es decir, escasas o monótonas necesidades de intercambio comercial.

Destaca aquí el caso de una persona que vende raspados desde hace 10 años, que si bien maneja permanentemente dinero por su condición de vendedora, al manejar un único precio (fijado además para facilitar el cálculo) sus esquemas han permanecido atados a esos datos y muestran escaso desarrollo.

En contrapartida, los sujetos con más desenvolvimiento en sus estrategias de cálculo (y con más capacidad de generalizarlas) son los sujetos cuya experiencia matemática ha sido diversa, frecuente y con exigencia de exactitud. Tal es el caso de los sujetos ubicados en el tercer nivel (Ávila,1988:10 y ss).

X. CONOCIMIENTO Y MANEJO DE SÍMBOLOS NUMÉRICOS

Existe disparidad en el conocimiento que sobre los símbolos numéricos poseen los analfabetos. Detectamos desde sujetos que conocen sólo el 5 e identifican los billetes por el color, hasta sujetos que reconocen la representación simbólica de todos los números naturales entre 1 y 1 000.

Y las fuentes de este conocimiento, a decir de los sujetos, son fundamentalmente los precios, las monedas, los números de las casas y de los camiones. Una mujer, por ejemplo, nos relata:

> Yo aprendí los números cuando llegué a México: en un papel traía anotada la dirección a donde yo venía… llegué a la calle [donde vivían los familiares] de puro preguntar; entonces empecé a ver los números en las puertas, hasta que dí con el que traía anotado…

Asimismo, son las exigencias laborales las que, en ocasiones, llevan a ampliar este conocimiento. Tal es el caso de un obrero que trabaja desde hace muchos años en una fábrica de zapatos. Ahí diariamente identifica los números marcados en los cortes de piel, pues éstos indican estilos de calzado con base en los cuales debe hacer determinadas perforaciones. Otro sujeto relata una situación parecida:

> Entre los artesanos empezamos a aprender porque vemos las cuentas de los otros, para saber cómo vamos. Unos saben más que otros, y ésos son los que te dicen, así es como poco a poco fui aprendiendo… también de albañil aprendí. El maestro albañil nos hacía las cuentas, porque nos pagaba por metro y nos mostraba las cuentas que él hacía para que viéramos lo que nos tenía que pagar.

Es posible afirmar, por otra parte, que no existe relación entre el uso de los símbolos numéricos o la posesión de un sistema gráfico de registro, y el desarrollo de las estrategias de cálculo. No contar con un sistema gráfico de registro no es un obstáculo para el cálculo y, en sentido inverso, contar con él tampoco asegura el desarrollo del mismo: las estrategias analfabetas de cálculo son, finalmente, estrategias ágrafas. En efecto, los sujetos no necesitan anotar las complicadas cuentas que hacen. Si bien en el *primer nivel* se observa apoyo frecuente en objetos físicos, es la memoria, cuyo desarrollo va aparejado al despliegue de la capacidad de cálculo, la que permite la realización de éste a niveles más complejos. Y tal situación es notoria en el *tercer nivel,* en donde el cálculo se apoya casi exclusivamente en el movimiento imperceptible de los dedos. Se nos dice al respecto: “las cuentas se hacen en la mente”, o “sólo se apunta lo que te queda o lo que entregas, lo demás (el cálculo) se hace pensando” (un sujeto refiriéndose a su trabajo como ayudante en un comercio al mayoreo).

Pero éstos no son casos excepcionales, algo similar ocurre con los demás sujetos a quienes prácticamente no vimos utilizar el lápiz para ejecutar los cálculos. Y es que, en el cálculo analfabeto, el sistema de registro —necesario fundamentalmente en el primer nivel— se constituye a partir de los dedos de las manos, las monedas y los billetes, cuya manipulación sustituye la posesión de un código gráfico. El manejo de este sistema de registro es el que, en muchas ocasiones, da a los sujetos del primer nivel la posibilidad de resolución.

Es importante destacar, en esta misma dirección, el valor relativo que los sujetos del tercer nivel son capaces de otorgar a los dedos de las manos, los cuales igual pueden representar 1, 10, 100, 1 000… De acuerdo con José:

> El que no sabe, cuenta con las manos… o sea también para contar de a 10 se empieza de aquí para acá [del meñique al pulgar]… 10, 20, 30, 40, 50… o sea $50 se cuentan aquí [en la mano]… o sean 50 centavos… o lo mismo si fuera a contar sumas grandes igualmente puede usted contar con las manos. O sea aquí [en la mano abierta] determina usted $50 000.

Siguiendo esta lógica, y suponiendo resuelto el problema de la memorización de los cálculos parciales, podría afirmarse que los sujetos ubicados en el *tercer nivel* son capaces de resolver prácticamente cualquier cálculo que se les presente, pues su sistema de registro ofrece enormes posibilidades.

Con base en la explicación insertada arriba y en la declaración hecha por varios sujetos acerca de que "el palabreo" ayuda a hacer las cuentas, sugerimos: los dedos de las manos y el "pensar en voz alta" son dos instrumentos poderosos que apoyan el cálculo mental. Y el manejo de ambos instrumentos, en el *tercer nivel,* llega a estar a tal grado interiorizado que resulta imperceptible hasta al observador más atento, de ahí que a lo largo del escrito hayamos hablado de cálculo mental cuando quizá debiésemos haber hablado de cálculo apoyado en movimiento imperceptible de dedos.

Este cálculo, por lo demás, representa el mayor grado de destreza, abstracción y generalización del cálculo construido por los analfabetos en la interacción con el mundo.

XI. REFLEXIONES FINALES

- La investigación confirma que los analfabetos construyen estrategias de cálculo diferentes de las que subyacen en los algoritmos escolarizados. No hay indicios de que las estrategias de resolución se inviertan y correspondan a las escolarizadas, ni siquiera en el *tercer nivel.* La pregunta es si los proyectos de alfabetización han de promover la consolidación y desarrollo de los esquemas y mecanismos propios de los analfabetos o, por el contrario, si han de basarse en la lógica de resolución escolarizada. En todo caso, una cuestión central es qué pasa con las estrategias construidas por los analfabetos cuando éstos se confrontan con la lógica de los programas. Desde la persepectiva de los programas el problema es cómo ponerse en relación con una estrategia que, siendo diferente y en ocasiones inversa, es eficaz en la vida cotidiana y laboral de los adultos, y por tanto es necesariamente el punto de partida de los analfabetos. Un reto es indagar si los mecanismos y estrategias de los adultos pueden ser desarrollados y consolidados mediante su formalización, y relacionarse así con las formas escolarizadas actuales. En cualquier caso, el reto de la educación de adultos no es sólo ponerse globalmente en relación con una lógica diferente o inversa, sino con los niveles de su desarrollo. Es evidente que los niveles encontrados exigen tácticas programáticas de resolución diferenciadas. Asimismo, sería importante construir procesos pedagógicos que facilitaran el tránsito de un nivel a otro mediante la intensificación y diversificación de la experiencia de aprendizaje.

Los adultos han desarrollado una estructura de pensamiento que deriva, fundamentalmente, del manejo del dinero y el intercambio comercial. No ocurre, sin embargo, que todos hayan logrado un grado óptimo de desarrollo en sus estrategias de cálculo. De hecho, hay algunos que por su limitada experiencia en el intercambio comercial y el manejo del dinero, se encuentran apenas construyéndolas.

La diferencia de niveles y de eficacia en el uso de mecanismos de cálculo puede ser comprendida en el contexto de las interacciones con el mercado. La intensidad, diversidad y complejidad del intercambio comercial que realizan los sujetos es lo que delimita las posibilidades de construcción y desarrollo de mecanismos y estrategias de cálculo.

La base decimal que tiene nuestro sistema monetario y el intercambio comercial, es isomorfa a la que sustentan las operaciones con números naturales. Esto plantea, al menos, el problema de la construcción de mecanismos y estrategias de sujetos analfabetos cuyo sistema cultural no implique intercambios comerciales en base diez.

- El carácter de esta investigación llevó a definir descriptivamente, según ciertos principios rectores e indicadores, los niveles de desarrollo del cálculo elemental entre los analfabetos. El problema de su delimitación conceptual sigue en pie. Nuevas indagaciones sobre los niveles aquí descritos podrán caracterizarlos como modelos hipotéticos que expliquen relaciones entre mecanismos, principios rectores y estrategias de resolución. Igualmente, en cada nivel deberán delimitarse *zonas de frontera,* de manera que pueda identificarse a los sujetos que no se han desprendido claramente de las características *prototípicas* de cada nivel.

- La problemática de la alfabetización ya no puede ser abordada en el plano de las generalizaciones programáticas. Es necesario acotar sus campos específicos. Y la acotación implica conjunción de ópticas disciplinarias y apertura a estrategias metodológicas diversas. Su tratamiento sistemático demanda, al menos, el concurso de *campos* consolidados, tales como la psicología y la epistemología genética, la antropología y la propia matemática.
- Confirmamos nuestra certeza de que el cálculo es parte fundamental en la vida cotidiana y laboral de los individuos y que, por lo tanto, ha de asumirse más allá del discurso como parte central de la alfabetización y la educación de adultos. Creemos que una tarea previa al desarrollo de programas y políticas educativas en la enseñanza de la aritmética, ha de ser la promoción de la investigación en torno al saber y los mecanismos de aprendizaje de los adultos, así como de su relación con los sistemas escolarizados. Los millones de analfabetos o adultos sin escolaridad básica que cotidianamente enfrentan problemas de cálculo, justifican que se realice tal empresa.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACIOLY, Nadma y Ana Lucía Días Schielman. "Intuitive mathematics and schooling in a lottery game". Proceeding of the Tenth International Conference of Psycology of Mathematics Education, London, julio de 1986.

ÁVILA Storer, Alicia *et al*. "Habilidades y conocimientos matemáticos de adultos recién alfabetizados o en proceso de alfabetización", Documento interno, México, INEA, 1986.

__________. "Las estrategias de cálculo aritmético de los adultos no alfabetizados", Tesis de maestría, Facultad de Filosofía y Letras, México, UNAM, 1988.

__________. "Cinco características del pensamiento matemático analfabeto", en *Pedagogía,* núm. 17, México, Universidad Pedagógica Nacional, enero-marzo de 1989.

CAMARENA, Isabel. "Comentarios generales acerca de laresolución de la prueba para determinación de niveles de alfabetización, en una muestra de adultos alfabetizados entre 1982 y 1985", Documento interno, México, INEA, 1986.

CARRAHER, Terezinha Nunes. “Rated addition: a correct aditive solution for proportion problems”, Proceeding of the Tenth International Conference of Psycology of Mathematics, London, julio de 1986.

CARRAHER, Terezinha Nunes *et al.* “Written and oral mathematics”, en *Journal of Research in Mathematics Education,* vol. 18, núm. 2, National Council of Teachers of Mathematics, marzo de 1987.

DIMENSIÓN EDUCATIVA. Cuentas claras. Cartilla de matemáticas para adultos, Bogotá, Dimensión Educativa, s/f.

FERREIRO, Emilia *et al.* “Los adultos no alfabetizados y sus conceptualizaciones del sistema de escritura”, en *Cuadernos de Investigación Educativa,* núm. 10, México, DIE, 1983.

INEA, Dirección de Educación Básica. “Habilidades básicas para el autodidactismo de los adultos recién alfabetizados entre 1982 y 1985”, Documento interno, México, 1986.

LURIA, A. K. *Los procesos cognitivos,* Barcelona, Fontanela, 1980.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Historical topics for the mathematics classroom,* Thirty-first yearbook, Washington, NCTM, 1969.

NEWMAN, James R. “El papiro Rhind”, en James R. Newman. *El mundo de las matemáticas,* vol. 1, 10a. ed., España, Sigma, 1985.

OCHOA, Jorge y Juan García Huidobro. “Tendencias de la investigación sobre educación de adultos en América Latina”, en *Ensayos sobre la educación de adultos en América Latina,* México, CEE, 1982.

SCHMELKES, Sylvia. “La investigación sobre educación de adultos en América Latina”, en *Ensayos sobre la educación de adultos en América Latina,* México, CEE, 1982.

ANEXO

1. Esquema de la adición

<table>
<tr><td colspan="2">Estrategia única</td><td>Procedimiento indoarábigo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Principio rector</td><td>Sumar primero lo más grande.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Casos en que es utilizada la estrategia</td><td>Todos los casos aritméticos (sin reagrupación y con reagrupación).</td></tr>
<tr><td rowspan="3">DESARROLLO PROGRESIVO DE LA ESTRATEGIA</td><td>Primer nivel</td><td>• Algunos sujetos no han consolidado el principio de sumar primero lo más grande.
• La estrategia es ineficiente, se necesitan tanteos repetidos para obtener los resultados.
• Se necesita apoyo en objetos físicos (por ejemplo, monedas) para realizar los cálculos, excepto en los más elementales.
• La reagrupación constituye un obstáculo insalvable en el cálculo, los casos que la implican no se resuelven.
• Hay escasa agilidad en el cálculo.</td></tr>
<tr><td>Segundo nivel</td><td>• Se ha consolidado el principio de sumar primero lo más grande.
• La estrategia es eficiente (disminuyen los tanteos propios del primer nivel) excepto en los casos que implican reagrupación.
• La reagrupación deja de ser obstáculo insalvable en el cálculo, la mayor parte de los sujetos resuelven los cálculos que implican. reagrupación, aunque con algunos tanteos
• Aumenta la agilidad en el cálculo.</td></tr>
<tr><td>Tercer nivel</td><td>• Permanece el principio de sumar primero lo más grande.
• Hay tendencia a no descomponer los números cuando terminan en 5 o 50.
• La estrategia es altamente eficiente, no se necesitan tanteos ni aun en los casos en que la reagrupación está implicada.
• El cálculo es exclusivamente mental.
• No hay obstáculos para el cálculo, la reagrupación se maneja con soltura.
• La agilidad en el cálculo es notable.</td></tr>
</table>

2. Esquema de la sustracción

Estrategia	Procedimiento indoarábigo	Sustracción por complemento aditivo
Principio rector	Restar primero lo más grande	Completar una cantidad
Casos en que es utilizada	Cuando el cálculo no implica desagrupación	Cuando el cálculo implica desagrupación
DESARROLLO PROGRESIVO DE LA ESTRATEGIA *Primer nivel*	• Se utiliza el principio de *restar primero lo más grande* • La estrategia es ineficiente, se realizan tanteos en todos los cálculos • El apoyo en objetos físicos para realizar los cálculos es frecuente • La estrategia es ineficaz, en algunos casos no lleva al resultado correcto • La idea de complemento es asociada frecuentemente al cálculo, pero en ocasiones se cambia por la idea de resta, ligada a la acción de gastar dinero • Hay escasa agilidad en el cálculo	• Sólo se resuelven los cálculos que incluyen números terminados en 0 y 5, respectivamente • El complemento se encuentra, generalmente, por conteo de 1 en 1 • La necesidad de tanteos es notable, la estrategia es altamente ineficiente • La necesidad de apoyo en objetos físicos, para resolver los cálculos, es frecuente • No se resuelven los cálculos que involucran números con terminaciones distintas de 5 o 0, de hecho, la estrategia para resolver tales casos no se ha configurado
Segundo nivel	• Se conserva el principio de *restar primero lo más grande* • Los cálculos se realizan, por lo general, mentalmente	• La estrategia se ha perfilado con claridad • No se necesita el apoyo en objetos físicos para realizar los cálculos

	• La estrategia no es del todo eficiente, se necesitan tanteos al resolver restas con números de dos cifras; sin embargo, se obtienen todos los resultados correctamente.	• La estrategia es ineficiente cuando los números involucrados no terminan en 5 o 0.
	• La idea predominante asociada a la resta es la de complemento.	• El conteo de 1 en 1 se necesita sólo en los casos en que los números involucrados tienen terminaciones distintas de 5 o 0.
		• La estrategia no es del todo eficaz, en ocasiones no se logran resultados correctos.
	• La agilidad en el cálculo, en relación con el nivel antecedente, ha aumentado.	• La agilidad en el cálculo, en relación con el nivel inicial, ha aumentado.
Tercer nivel	• Permanece el principio de *restar primero lo más grande.*	• La estrategia es altamente eficiente, los tanteos han desaparecido.
	• La estrategia es altamente eficiente, no se necesitan tanteos para realizar los cálculos.	• No se necesitan conteos de 1 en 1 para obtener el *complemento.*
	• La estrategia es eficaz, se obtienen todos los resultados.	• No hay obstáculos para el cálculo, la estrategia se vuelve eficaz gracias a la incorporación del *redondeo*, mecanismo que permite el logro de todos los resultados.
	• La idea predominante asociada a la resta es la de complemento.	• El cálculo es exclusivamente mental.
	• No hay obstáculos para el cálculo.	• La agilidad en el cálculo ha aumentado notablemente, en relación con el nivel antecedente.
	• La agilidad en el cálculo, en relación con los niveles antecedentes, es notable.	

3. Esquema de la multiplicación

Estrategia	Conteo o suma de sumandos iguales.	Duplicación reiterada.	Multiplicación abreviada.
Principio rector	Conteo de series digitales.	Duplicar reiteradamente el último factor.	Simplificación sintética de la *duplicación reiterada.*
Casos en que es utilizada	Cuando los números involucrados son dígitos o pueden manejarse como dígitos y refieren a una serie memorizada previamente.	En todos los casos aritméticos, excepto en aquellos que se resuelven por conteo o suma de sumandos iguales.	Cuando los cálculos no pueden resolverse por conteo simple.
DESARROLLO PROGRESIVO DE LA ESTRATEGIA — *Primer nivel*	• La estrategia es eficaz, se logran resultados correctos en todos los casos. • El apoyo en objetos físicos es frecuente. • Hay escasa agilidad en los cálculos.	• La estrategia no se encuentra consolidada, frecuentemente se mezcla con la suma de sumandos iguales. • La estrategia no es eficiente ni eficaz, no se obtienen resultados correctos casi en ningún caso. • Se necesita, de manera generalizada, el apoyo en objetos físicos. • Hay problemas para memorizar el número de duplicaciones que se realizan. • Hay escasa agilidad en el cálculo.	• La estrategia no se ha construido.
DESARROLLO PROGRESIVO DE LA ESTRATEGIA — *Segundo nivel*	• La estrategia es eficaz, se logran resultados correctos en todos los casos.	• La estrategia se ha consolidado.	• La estrategia no se ha construido.

	• El cálculo es predominantemente mental. • La agilidad en el cálculo ha aumentado, en relación con el nivel antecedente.	• La estrategia es eficaz, excepto en multiplicaciones de números de dos cifras con terminaciones diferentes de 5 o 0. La ineficacia toma dos formas: abandono de la estrategia, u obtención de sumas parciales que no logran integrarse. • La eficiencia ha aumentado, los tanteos disminuyen. • El cálculo es predominantemente mental. • La agilidad en el cálculo ha aumentado en relación con el nivel antecedente.	
Tercer nivel	• La estrategia es altamente eficiente y eficaz. • El cálculo es exclusivamente mental. • Se ha abreviado el cálculo y los resultados se obtienen sin conteo evidente. • Se han memorizado algunos productos, lo cual permite notable agilidad en el cálculo.	• La estrategia, prácticamente, ha caído en desuso, y se sustituye por otra denominada de multiplicación abreviada.	• La estrategia constituye una síntesis de la duplicación reiterada, a la cual sustituye. • La estrategia se ha construido gracias a la memorización de algunos productos. • El cálculo es exclusivamente mental. • La eficiencia, eficacia y agilidad con que se utiliza la estrategia son notables.

4. Esquema de la división

Estrategia	Suma iterada del cociente hipotético.	Suma iterada del cociente hipotético (con descomposición del dividendo) .	Suma iterada de múltiplos del divisor.
Principio rector	Hipotetizar un cociente y ponerlo a prueba mediante su suma reiterada.	Hipotetizar un cociente parcial y ponerlo a prueba mediante su suma reiterada.	Obtención y suma reiterada de múltiplos del divisor.
Casos en que es utilizada	Básicamente cuando el dividendo y el divisor son dígitos o pueden manejarse como dígitos.	Básicamente cuando el divisor es un dígito o puede manejarse como tal, y el dividendo tiene 2 o 3 cifras significativas.	En divisiones de números de 3 cifras entre otros de 1 o 2 donde hay residuo intermedio, o si la suma reiterada del cociente resulta laboriosa.
DESARROLLO PROGRESIVO DE LA ESTRATEGIA — *Primer nivel*	• La estrategia está definida. • La estrategia es ineficiente, se necesitan varios tanteos para obtener un resultado. • Se necesita apoyo en objetos físicos para realizar los cálculos. • La estrategia es ineficaz, no se obtienen todos los resultados.	• La estrategia está perfilada pero es ineficaz, sólo algunos sujetos obtienen resultados correctos. • La estrategia es ineficiente, se necesitan varios tanteos para obtener los resultados. • El apoyo en objetos físicos es generalizado. • No se resuelven los cálculos que implican residuo intermedio, porque la expectativa de los sujetos es obtener en la prueba del cociente una suma igual al "dividendo parcial" y tal expectativa no se cumple.	• No se ha construido la estrategia.

	• No se resuelven los cálculos con residuo. • La agilidad en el cálculo es escasa.	• La agilidad en el cálculo es escasa.	
Segundo nivel	• Aumentan la eficiencia y la eficacia de la estrategia en relación con el nivel antecedente: los tanteos han disminuido y se obtienen todos los cálculos que no implican residuo.	• La estrategia es eficaz en los casos en que no hay residuo intermedio. • La eficiencia ha aumentado: los tanteos han disminuido. • El cálculo es exclusivamente mental. • El obstáculo en el cálculo lo constituye el residuo intermedio que, cuando aparece, cancela la posibilidad de resolución. • La agilidad del cálculo ha aumentado.	• No se ha construido la estrategia.
Tercer nivel	• La estrategia es altamente eficiente: el primer cociente que se hipotetiza resulta válido. • Se resuelven todos los cálculos, el residuo deja de ser obstáculo. • La agilidad en el cálculo es notable. • El cálculo es exclusivamente mental.	• La estrategia es eficaz en todos los casos. • El cálculo es exclusivamente mental • La agilidad en el cálculo es notable.	• Esta estrategia elimina los obstáculos para el cálculo de cocientes. • El cálculo es exclusivamente mental. • La eficiencia, la eficacia y la agilidad en el cálculo son notables.